ΘΕΜΑ 2_17736

α. Με τη βασική τριγωνομετρική ταυτότητα $ημ^2 x + συν^2 x = 1$ και τη ταυτότητα της διαφοράς τετραγώνων, έχουμε:

$$A = \frac{ημ^2 x}{1-συνx} = \frac{1-συν^2 x}{1-συνx} = \frac{(1-συνx)(1+συνx)}{1-συνx} = \mathbf{1+συνx}$$

β. Με τη βοήθεια του προηγούμενου ερωτήματος, η εξίσωση μετασχηματίζεται ισοδύναμα, ως εξής:

$$\frac{ημ^2 x}{1-συνx} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow 1+συνx = \frac{1}{2} \Leftrightarrow συνx = \frac{1}{2} - 1 \Leftrightarrow συνx = -\frac{1}{2}$$

Στη συνέχεια, τη λύνουμε κατά τα γνωστά:

$$συνx = -\frac{1}{2} \Leftrightarrow συνx = -συν\frac{π}{3} \Leftrightarrow συνx = συν(π - \frac{π}{3}) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow συνx = συν\frac{2π}{3} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2κπ + \frac{2π}{3} \\ x = 2κπ - \frac{2π}{3} \end{cases} \quad (κ \in \mathbb{Z})$$

Για την 1η λύση έχουμε, στο διάστημα $(0, 2π)$:

$0 < x < 2π \Leftrightarrow$

$0 < 2κπ + \frac{2π}{3} < 2π \Leftrightarrow$ (προσθέτουμε σε όλα τα μέλη $-\frac{2π}{3}$)

$0 - \frac{2π}{3} < 2κπ + \frac{2π}{3} - \frac{2π}{3} < 2π - \frac{2π}{3} \Leftrightarrow$

$-\frac{2π}{3} < 2κπ < \frac{4π}{3} \Leftrightarrow$ (απλοποιούμε το π, απ' όλα τα μέλη)

$-\frac{2}{3} < 2κ < \frac{4}{3} \Leftrightarrow$ (διαιρούμε όλα τα μέλη με 2)

$-\frac{1}{3} < κ < \frac{2}{3}$

Επειδή όμως $κ \in \mathbb{Z}$, τότε η μοναδική λύση είναι $κ = 0$. Επομένως, η 1η λύση για $κ = 0$ γίνεται:

$x = 2 \cdot 0 \cdot π + \frac{2π}{3} \Leftrightarrow \mathbf{x = \frac{2π}{3}}$

Ομοίως, για την 2η λύση έχουμε, στο διάστημα $(0, 2\pi)$:

$0 < x < 2\pi \Leftrightarrow$

$0 < 2\kappa\pi - \frac{2\pi}{3} < 2\pi \Leftrightarrow$

$0 + \frac{2\pi}{3} < 2\kappa\pi - \frac{2\pi}{3} + \frac{2\pi}{3} < 2\pi + \frac{2\pi}{3} \Leftrightarrow$

$\frac{2\pi}{3} < 2\kappa\pi < \frac{8\pi}{3} \Leftrightarrow$

$\frac{2}{3} < 2\kappa < \frac{8}{3} \Leftrightarrow$

$\frac{1}{3} < \kappa < \frac{4}{3}$

Επειδή $\kappa \in \mathbb{Z}$, τότε η μοναδική λύση είναι $\kappa = 1$. Επομένως, η 2η λύση για $\kappa = 1$ γίνεται:

$x = 2 \cdot 1 \cdot \pi - \frac{2\pi}{3} = 2\pi - \frac{2\pi}{3} \Leftrightarrow \mathbf{x = \frac{4\pi}{3}}$

Δεδομένου του αρχικού μας περιορισμού $x \neq 2\kappa\pi$, καταλήγουμε ότι και οι δύο λύσεις μας είναι δεκτές.