

ΘΕΜΑ 2_17709

α. i. Λύνουμε το σύστημα εξισώσεων των (ε_1) και (ε_2) :

$$\begin{cases} 2x + y = 5 \\ -2x + 3y = -9 \end{cases} \oplus \Leftrightarrow 4y = -4 \Leftrightarrow y = -1$$

Με αντικατάσταση στην 1η εξίσωση, όπου $y = -1$ έχουμε:

$$2x - 1 = 5 \Leftrightarrow 2x = 6 \Leftrightarrow x = 3$$

Δηλαδή, το σύστημα έχει μοναδική λύση την $(3, -1)$, η οποία και αποτελεί τις συντεταγμένες του σημείου τομής των δύο ευθειών.

ii. Λύνουμε το σύστημα εξισώσεων των (ε_1) και (ε_3) :

$$\begin{cases} 2x + y = 5 \\ 3x + 2y = 7 \end{cases} \Leftrightarrow (-2) \cdot \begin{cases} 2x + y = 5 \\ 3x + 2y = 7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -4x - 2y = -10 \\ 3x + 2y = 7 \end{cases} \oplus \Leftrightarrow \begin{cases} -4x - 2y = -10 \\ 3x + 2y = 7 \end{cases} \Leftrightarrow -x = -3 \Leftrightarrow x = 3$$

Με αντικατάσταση στην 1η εξίσωση, όπου $x = 3$ έχουμε:

$$2 \cdot 3 + y = 5 \Leftrightarrow 6 + y = 5 \Leftrightarrow y = -1$$

Δηλαδή, το σύστημα έχει μοναδική λύση την $(3, -1)$, η οποία και αποτελεί τις συντεταγμένες του σημείου τομής των δύο ευθειών.

β. Από το ερώτημα (α) είναι προφανές ότι και οι τρεις ευθείες διέρχονται από το ίδιο σημείο, με συντεταγμένες $(3, -1)$. Συνεπώς, το σημείο αυτό είναι και κοινό σημείο των (ε_2) και (ε_3) .

Ωστόσο, είναι συνετό να εξετάσουμε ότι είναι και το μοναδικό. Όμως, δύο ευθείες που έχουν περισσότερα από δύο κοινά σημεία, απλά ταυτίζονται. Θα πρέπει, λοιπόν, να δείξουμε ότι οι (ε_2) και (ε_3) δεν ταυτίζονται. Για το σκοπό αυτό, δε χρειάζεται να λύσουμε ολόκληρο το σύστημα των εξισώσεών τους, ώστε να δείξουμε ότι είναι αόριστο. Αρκεί να φανεί ότι η οριζούσα του συστήματος είναι διάφορη του μηδενός. Έχουμε, λοιπόν, για τις (ε_2) : $-2x + 3y = -9$ και (ε_3) : $3x + 2y = 7$...

$$D = \begin{vmatrix} -2 & 3 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = -2 \cdot 2 - 3 \cdot 3 = -4 - 9 = -13 \neq 0$$

Όπερ έδει δείξα... :-)