ΘΕΜΑ 2_17703

α. **1ος τρόπος**

Λύνουμε τις εξισώσεις των δύο ευθειών, ως προς y, προκειμένου να υπολογίσουμε τους συντελεστές διεύθυνσής τους:

$(\varepsilon_1) : 2x - y = -1 \Leftrightarrow y = 2x + 1$, άρα $\boldsymbol{\lambda_1 = 2}$

$(\varepsilon_2) : (\lambda - 1)x - y = 6 \Leftrightarrow y = (\lambda - 1)x - 6$, άρα $\boldsymbol{\lambda_2 = \lambda - 1}$

Γνωρίζουμε πως όταν δυο ευθείες είναι παράλληλες, τότε έχουν τον ίδιο συντελεστή διεύθυνσης, άρα πρέπει:

$\lambda_1 = \lambda_2 \Leftrightarrow 2 = \lambda - 1 \Leftrightarrow \boldsymbol{\lambda = 3}$

2ος τρόπος

Υπολογίζουμε την ορίζουσα του συστήματος: $\begin{cases} 2x - y = -1 \\ (\lambda - 1)x - y = 6 \end{cases}$

$$D = \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ \lambda - 1 & -1 \end{vmatrix} = 2\cdot(-1) - (\lambda - 1)(-1) = -2 + \lambda - 1 = \lambda - 3$$

Προκειμένου οι δύο ευθείες να είναι παράλληλες, αρκεί το σύστημα να είναι αδύνατο. Για να συμβεί αυτό, θα πρέπει καταρχάς:

$D = 0 \Leftrightarrow \lambda - 3 = 0 \Leftrightarrow \boldsymbol{\lambda = 3}$

Αυτό, από μόνο του όμως δεν αρκεί, καθώς για D = 0 το σύστημα είναι άλλοτε αδύνατο κι άλλοτε αόριστο. Απαιτούμε, επιπλέον, μία εκ των D_x , D_y να είναι διάφορη του μηδενός:

$$D_x = \begin{vmatrix} -1 & -1 \\ 6 & -1 \end{vmatrix} = -1\cdot(-1) - 6\cdot(-1) = 1 + 6 = 7$$

Αφού λοιπόν $D_x \neq 0$ για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$, τότε η προϋπόθεση $\boldsymbol{\lambda = 3}$ είναι αρκετή ώστε το σύστημα να είναι αδύνατο και, συνεκδοχικά, οι ευθείες παράλληλες.

3ος τρόπος

Αρκεί μονάχα να παρατηρήσουμε τις δύο εξισώσεις. Διαπιστώνουμε ότι για $\lambda - 1 = 2$, τα πρώτα μέλη γίνονται ίσα, ενώ τα δεύτερα μέλη παραμένουν διαφορετικά. Στην περίπτωση αυτή, γνωρίζουμε ότι το σύστημα των δύο εξισώσεων καταλήγει αδύνατο και, συνεπώς, οι ευθείες παράλληλες. Για να συμβούν λοιπόν τα προηγούμενα, αρκεί:

$$\lambda - 1 = 2 \Leftrightarrow \boldsymbol{\lambda = 3}$$

β. Για $\lambda = 3$, οι δύο εξισώσεις γίνονται:

$(\varepsilon_1) : 2x - y = -1$

$(\varepsilon_2) : 2x - y = 6$

Για την ευθεία (ε_1) :

Για $\mathbf{x = 0}$ είναι: $2 \cdot 0 - y = -1 \Leftrightarrow$ $\mathbf{y = 1}$, άρα έχουμε το σημείο $\mathbf{(0, 1)}$

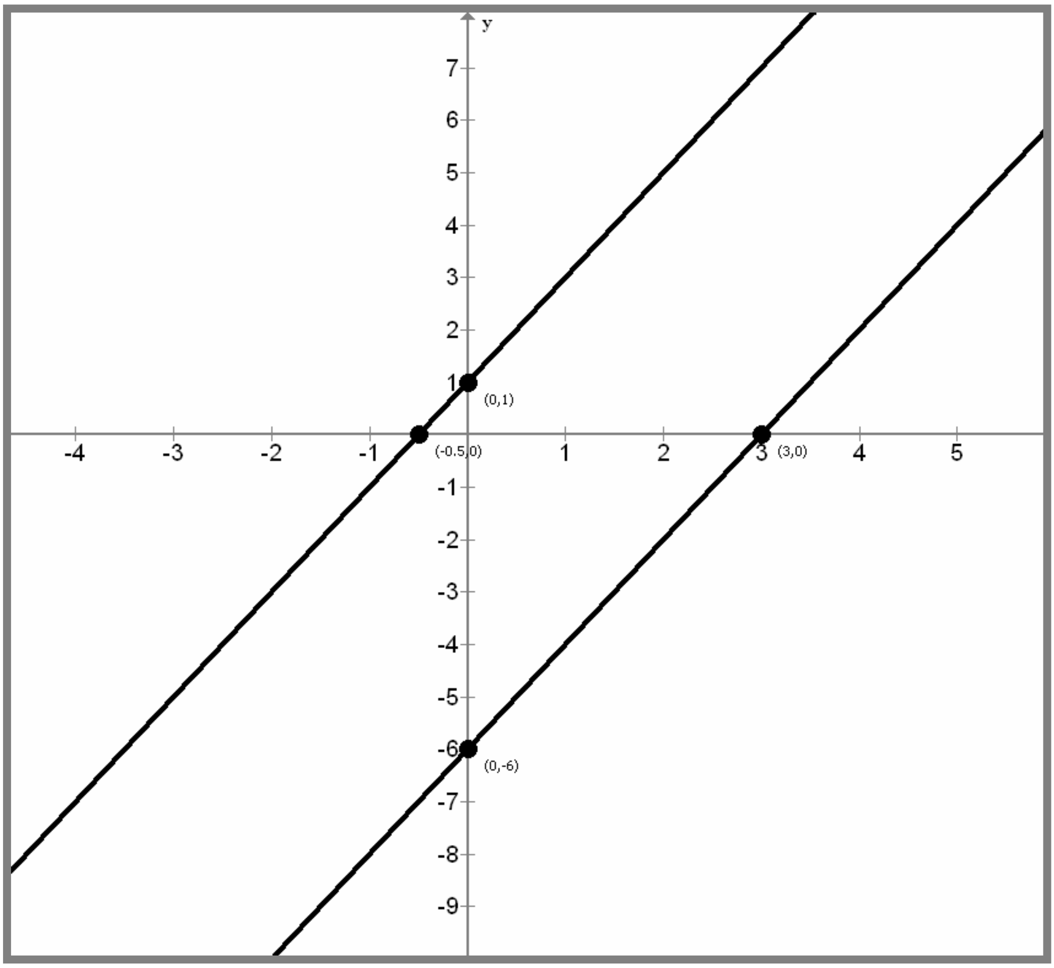
Για $\mathbf{y = 0}$ είναι: $2x - 0 = -1 \Leftrightarrow$ $\mathbf{x = -\frac{1}{2}}$, άρα έχουμε το σημείο $\mathbf{(-\frac{1}{2}, 0)}$

Για την ευθεία (ε_2) :

Για $\mathbf{x = 0}$ είναι: $2 \cdot 0 - y = 6 \Leftrightarrow$ $\mathbf{y = -6}$, άρα έχουμε το σημείο $\mathbf{(0, -6)}$

Για $\mathbf{y = 0}$ είναι: $2x - 0 = 6 \Leftrightarrow$ $\mathbf{x = 3}$, άρα έχουμε το σημείο $\mathbf{(3, 0)}$

Προχωρούμε, λοιπόν, στο σχεδιασμό των αντίστοιχων, γραφικών παραστάσεων:



γ. Αν υπήρχε $\lambda \in \mathbb{R}$ τέτοιο, ώστε οι δύο ευθείες να ταυτίζονται, τότε για την τιμή αυτή του λ το σύστημα των δύο εξισώσεων θα έπρεπε να βγαίνει αόριστο. Για να συνέβαινε αυτό και δεδομένου πως δεν είναι όλοι οι συντελεστές των αγνώστων μηδενικοί, θα έπρεπε $D = D_x = D_y = 0$. Όμως αυτό είναι αδύνατο, καθώς – όπως εξηγείται στο 2ο τρόπο επίλυσης του (α) ερωτήματος :

- $D = 0$, για $\lambda = 3$.
- $D_x \neq 0$, για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$.

Με άλλα λόγια, το σύστημα έχει μοναδική λύση για κάθε $\lambda \neq 3$, είναι αδύνατο για $\lambda = 3$ και σε καμία περίπτωση δεν είναι αόριστο.