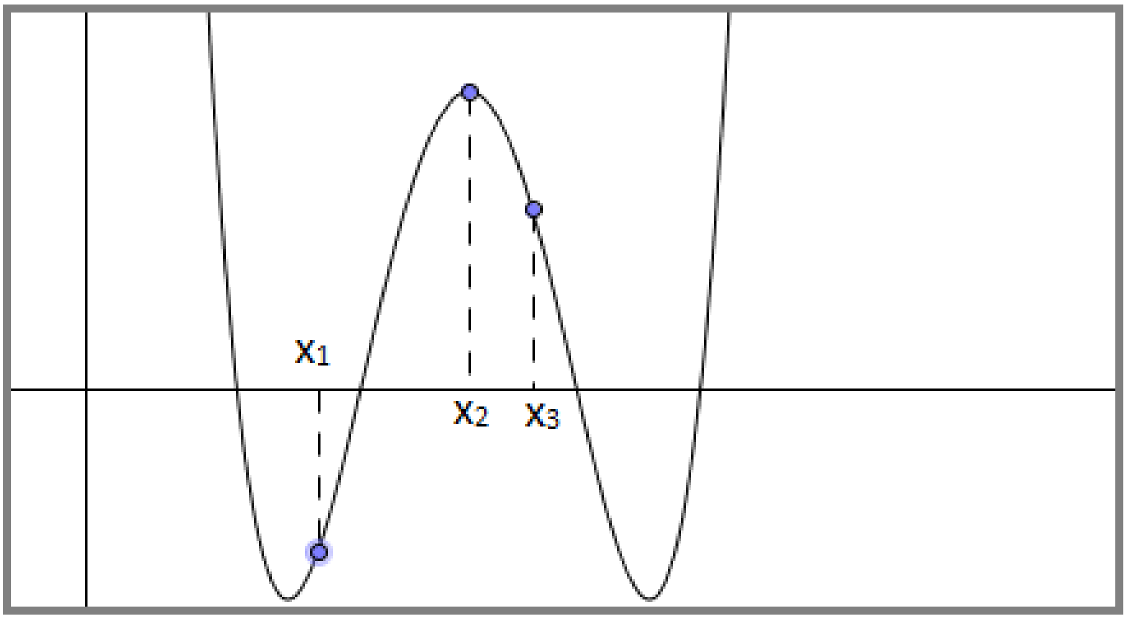
ΘΕΜΑ 2_17698



α. Το πιο εύκολο πράγμα στον κόσμο, θα ήταν να απαντήσουμε ότι:

$$f(x_1) < f(x_3) < f(x_2)$$

συγκρίνοντας τις υψομετρικές τους διαφορές, όπως αυτές «φαίνονται» στο σχήμα. Μια πληρέστερα, ωστόσο, απάντηση θα πρέπει να δωθεί αλγεβρικά.

Για την τιμή x_1 , παρατηρούμε ότι η συνάρτηση παίρνει τιμή «κάτω» από τον άξονα x΄x , συνεπώς θα είναι αρνητική. Σε αντίθεση με αυτό, στα σημεία x_2 , x_3 η συνάρτηση παίρνει τιμές «πάνω» από τον άξονα x΄x , συνεπώς θα είναι θετική. Άρα, μπορούμε με βεβαιότητα να αποφανθούμε ότι η $f(x_1)$ είναι η μικρότερη από τις τρεις.

Στο διάστημα $[x_2 , x_3]$ παρατηρούμε ότι η συνάρτηση είναι γνησίως φθίνουσα, που σημαίνει ότι:

$$x_2 < x_3 \Leftrightarrow f(x_2) > f(x_3)$$

Συνδυάζοντας τα συμπεράσματά μας, με απόλυτη βεβαιότητα πλέον, μπορούμε να πούμε ότι:

$$\mathbf{f(x_1) < f(x_3) < f(x_2)}$$

β. Είναι προφανές πως η συνάρτηση δεν είναι γνησίως μονότονη στο $\mathbb{R}$, καθώς η μονοτονία της μεταβάλλεται τρεις φορές .

γ. Η f παρουσιάζει στο x_2 μόνο τοπικό μέγιστο και όχι ολικό. Αυτό διαπιστώνεται πολύ εύκολα από το σχήμα, καθώς τόσο στον πιο αριστερό, όσο και στο δεξιότερο κλάδο της γραφικής παράστασης, παρατηρούμε τις τιμές της f να αυξάνονται απεριόριστα.

Να το πούμε και διαφορετικά: αν φέρουμε την παράλληλη ευθεία προς τον άξονα $x'x$, η οποία διέρχεται από το x_2 , δηλαδή την ευθεία με εξίσωση $f(x) = f(x_2)$, παρατηρούμε ότι αυτή θα τέμνει τη γραφική παράσταση της συνάρτησης σε 2 σημεία. Αυτό σημαίνει ότι θα υπάρχουν και άλλα σημεία «ψηλότερα» με τεταγμένες, προφανώς, μεγαλύτερες από την $f(x_2)$.