ΘΕΜΑ 2_17693

α. Οι γωνίες των π/6 και π/4 ακτινίων είναι και οι δύο γωνίες του 1ου τεταρτημορίου. Στο τεταρτημόριο αυτό όλα τα πρόσημα είναι θετικά, γεγονός που δε μας βοηθάει ιδιαίτερα στη σύγκριση. Θυμόμαστε τον πίνακα τιμών και μονοτονίας της συνάρτησης συνx :

x	0	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
συνx	1	0	−1	0	1

Παρατηρούμε ότι στο 1ο τεταρτημόριο η συνάρτηση είναι γνησίως φθίνουσα, επομένως για κάθε $x_1 < x_2 \Leftrightarrow συνx_1 > συνx_2$. Αναλόγως θα έχουμε, λοιπόν:

$$\frac{\pi}{6} < \frac{\pi}{4} \Leftrightarrow \boldsymbol{συν\frac{\pi}{6} > συν\frac{\pi}{4}} \quad (1)$$

Όσον αφορά, τώρα, στον έτερο τριγωνομετρικό αριθμό, τον μετασχηματίζουμε κατάλληλα, με την βοήθεια των κανόνων αναγωγής στο 1ο τεταρτημόριο:

$$συν\frac{17\pi}{10} = συν\frac{20\pi - 3\pi}{10} = συν\left(\frac{20\pi}{10} - \frac{3\pi}{10}\right) = συν\left(2\pi - \frac{3\pi}{10}\right) =$$

$$= συν\left(-\frac{3\pi}{10}\right) = συν\frac{3\pi}{10}$$

Εύκολα, μπορούμε να αποδείξουμε τη σχέση της γωνίας των $\frac{3\pi}{10}$ ακτινίων, με τις προηγούμενες γωνίες, αν καταστήσουμε όλα τα κλάσματα ομώνυμα:

$$\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{10} = (\text{ΕΚΠ} = 60) = \frac{10\pi}{60}, \frac{15\pi}{60}, \frac{18\pi}{60}$$

Επεκτείνουμε λοιπόν τη σχέση (1) , η οποία και μας δίνει την ζητούμενη σχέση:

$$\frac{\pi}{6} < \frac{\pi}{4} < \frac{3\pi}{10} \Leftrightarrow \boldsymbol{συν\frac{\pi}{6} > συν\frac{\pi}{4} > συν\frac{3\pi}{10}}$$

β. Από τη σχέση που δίνεται: $\pi < x_1 < x_2 < 3\pi/2$, αντιλαμβανόμαστε ότι όλες μας οι εργασίες θα γίνουν στο 3ο τεταρτημόριο. Στο τεταρτημόριο αυτό, θυμόμαστε τον πίνακα τιμών και μονοτονίας της συνάρτησης ημx :

x	0	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
ημx	0	1	0	-1	0

Παρατηρούμε, λοιπόν, ότι στο 3ο τεταρτημόριο η συνάρτηση ημx είναι γνησίως φθίνουσα, επομένως για κάθε $x_1 < x_2 \Leftrightarrow ημx_1 > ημx_2 \quad (2)$.

Έχουμε, τελικά:

$x_1 < x_2 \;\Leftrightarrow$

Πολλαπλασιάζουμε και τα 2 μέλη με -1 , αλλάζοντας τη φορά:

$-x_1 > -x_2 \;\Leftrightarrow$

Προσθέτουμε και στα 2 μέλη π/2 :

$\frac{\pi}{2} - x_1 > \frac{\pi}{2} - x_2 \;\Leftrightarrow$

«Περνάμε» σε ημίτονα, αντιστρέφοντας ωστόσο τη φορά, λόγω της (2) :

$\mathbf{ημ(\frac{\pi}{2} - x_1) < ημ(\frac{\pi}{2} - x_2)}$