ΘΕΜΑ 2_17692

α. $ημ(\frac{π}{2} + x) + συν(π + x) =$

$ημ(\frac{π}{2} - (-x)) + συν(π + x)$ (1)

Οι παραστάσεις, εντός των τριγωνομετρικών αριθμών, μας παραπέμπουν στους κανόνες αναγωγής στο πρώτο τεταρτημόριο. Πιο συγκεκριμένα, η πρώτη παράσταση στον κανόνα των συμπληρωματικών γωνιών, ενώ η δεύτερη στον κανόνα των γωνιών που διαφέρουν κατά $π$. Για αυτές γνωρίζουμε ότι:

$$ημ(\frac{π}{2} - ω) = συνω \ \ \& \ \ συν(π + ω) = -συνω$$

Με βάση τα προηγούμενα, κι επιπλέον γνωρίζοντας ότι οι αντίθετες γωνίες έχουν ίδιο συνημίτονο, δηλαδή $συν(-x) = συνx$, η (1) γίνεται:

$ημ(\frac{π}{2} - (-x)) + συν(π + x) = συν(-x) - συνx = συνx - συνx = 0$

β. Λύνουμε, καταρχάς, την εξίσωση:

$συνx = -ημ(\frac{π}{2} + x)$

Απ' το ερώτημα (α) , έχει καταστεί σαφές ότι : $ημ(\frac{π}{2} + x) = συνx$.

Επομένως:

$συνx = -συνx \Leftrightarrow$

$συνx = συν(π - x) \Leftrightarrow$

$$\begin{cases} x = 2κπ + π - x \\ x = 2κπ - (π - x) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x = 2κπ + π \\ x = 2κπ - π + x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = κπ + \frac{π}{2} \\ 0 = 2κπ - π \end{cases}$$

Η δεύτερη εξίσωση όμως είναι αδύνατη, γιατί:

$2κπ - π = 0 \Leftrightarrow 2κ - 1 = 0 \Leftrightarrow κ = 1/2$ (άτοπο, γιατί $κ \in \mathbb{Z}$)

Συνεπώς, μας απομένει η λύση: $\boldsymbol{x = κπ + \frac{π}{2}}$ $(κ \in \mathbb{Z})$ (2)

Ωστόσο, εμείς επιθυμούμε τα x εκείνα, ώστε $x \in [0, 2π]$.

$x \in [0, 2π] \Leftrightarrow$

$0 \leq x \leq 2π \Leftrightarrow$

$0 \leq κπ + \frac{π}{2} \leq 2π \Leftrightarrow$

$0 - \frac{\pi}{2} \le \kappa\pi + \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2} \le 2\pi - \frac{\pi}{2} \Leftrightarrow$ (προσθέτουμε σε όλα τα μέλη $-\frac{\pi}{2}$)

$-\frac{\pi}{2} \le \kappa\pi \le \frac{3\pi}{2} \Leftrightarrow$ (απλοποιούμε όλα τα μέλη με το π)

$-\frac{1}{2} \le \kappa \le \frac{2}{2}$

Επειδή όμως $\kappa \in \mathbb{Z}$, οι δυνατές τιμές του θα είναι κ = 0 ή κ = 1 .

- Για κ = 0 η λύση (2) γίνεται: $x = 0 \cdot \pi + \frac{\pi}{2} \Leftrightarrow \mathbf{x = \frac{\pi}{2}}$
- Για κ = 1 η λύση (2) γίνεται: $x = 1 \cdot \pi + \frac{\pi}{2} \Leftrightarrow \mathbf{x = \frac{3\pi}{2}}$