ΘΕΜΑ 2_17688

α. Πρέπει να δείξουμε ότι f(x) ≤ 1 $\Leftrightarrow$ $\frac{2x}{x^2+1} \le 1$.

Αρκεί να δείξουμε, ισοδύναμα, ότι:

$2x \le x^2 + 1 \Leftrightarrow$ (απαλοιφή παρονομαστών με $x^2 + 1 > 0$)

$0 \le x^2 + 1 - 2x \Leftrightarrow$

$(x - 1)^2 \ge 0$

Η τελευταία όμως είναι αληθής, εφόσον κάθε πραγματικός στο τετράγωνο μη αρνητικός.

β. Σύμφωνα με τον ορισμό της μέγιστης τιμής Μ, θα πρέπει f(x) ≤ Μ για κάθε $x \in A_f$. Όμως, αυτό ακριβώς συμβαίνει και στην περίπτωσή μας, αφού f(x) ≤ 1 για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Μάλιστα, η f παίρνει τη μέγιστη τιμή της για $x_0 = 1$, κάτι που μπορούμε να επαληθεύσουμε πολύ εύκολα, λύνοντας απλά την εξίσωση:

$$\frac{2x}{x^2+1} = 1$$

γ. Εφόσον, το πεδίο ορισμού της f είναι $A_f = \mathbb{R}$, άρα για κάθε $x \in A_f$ είναι και $-x \in A_f$. Συνεπώς, έχουμε:

$$\mathbf{f(-x)} = \frac{2(-x)}{(-x)^2+1} = \frac{-2x}{x^2+1} = -\frac{2x}{x^2+1} = \mathbf{-f(x)}$$

Άρα, η f είναι περιττή.