ΘΕΜΑ 2_17683

α. Για λ = −3 το δοθέν σύστημα γίνεται:

$$\begin{cases}(\lambda+1)x+2y=3\\ 4x+(\lambda-1)y=-6\end{cases} \overset{\lambda=-3}{\Leftrightarrow} \begin{cases}(-3+1)x+2y=3\\ 4x+(-3-1)y=-6\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}-2x+2y=3\\ 4x-4y=-6\end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases}-2x+2y=3\\ :(-2)\ \ 4x-4y=-6\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}-2x+2y=3\\ -2x+2y=3\end{cases}$$

Είναι προφανές, αφού οι δύο εξισώσεις ταυτίζονται, ότι πρόκειται για αόριστο σύστημα. Λύνοντας την εξίσωση, ως προς y :

$$-2x + 2y = 3 \Leftrightarrow 2y = 2x + 3 \Leftrightarrow y = x + 3/2$$

προκύπτει ότι οι άπειρες λύσεις του θα έχουν τη μορφή:

$$\mathbf{(x_0, y_0) = (\kappa, \kappa + 3/2)} \text{ με } \kappa\in\mathbb{R}$$

Επομένως, προκειμένου να βρούμε μια τυχαία λύση του, θέτουμε μια τυχαία, πραγματική τιμή στο κ , πχ. κ = 1 , άρα κ + 3/2 = 1 + 3/2 = 5/2 . Δηλαδή, μια ζητούμενη λύση είναι η:

$$\mathbf{(x_0, y_0) = (1, 5/2)}$$

β. Αναλόγως, για λ = 3 έχουμε:

$$\begin{cases}(\lambda+1)x+2y=3\\ 4x+(\lambda-1)y=-6\end{cases} \overset{\lambda=3}{\Leftrightarrow} \begin{cases}(3+1)x+2y=3\\ 4x+(3-1)y=-6\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}4x+2y=3\\ 4x+2y=-6\end{cases}$$

Επειδή, τα πρώτα μέλη είναι ίσα, θα περιμέναμε να είναι και τα δεύτερα, κάτι που όμως δε συμβαίνει. Συνεπώς, το σύστημα σε αυτή την περίπτωση είναι αδύνατο.

γ. Για λ = 0 έχουμε:

$$\begin{cases}(\lambda+1)x+2y=3\\ 4x+(\lambda-1)y=-6\end{cases} \overset{\lambda=0}{\Leftrightarrow} \begin{cases}(0+1)x+2y=3\\ 4x+(0-1)y=-6\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x+2y=3\\ 4x-y=-6\end{cases}$$

1ος τρόπος - Μέθοδος Αντικατάστασης

$$\begin{cases} x+2y=3 \\ 4x-y=-6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=3-2y \\ 4(3-2y)-y=-6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=3-2y \\ 12-8y-y=-6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=3-2y \\ -9y=-18 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x=3-2\cdot 2 \\ y=2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \mathbf{x=-1} \\ \mathbf{y=2} \end{cases}$$

2ος τρόπος - Μέθοδος Αντίθετων Συντελεστών

$$\begin{cases} x+2y=3 \\ 4x-y=-6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{matrix} (-4)\cdot \\ \\ \end{matrix}\begin{cases} x+2y=3 \\ 4x-y=-6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -4x-8y=-12 \\ 4x-y=-6 \end{cases} \overset{\oplus}{\Leftrightarrow} -9y=-18 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \mathbf{y=2}$$

Με αντικατάσταση στην 1η εξίσωση, όπου y = 2 έχουμε:

$x + 2\cdot 2 = 3 \Leftrightarrow x = 3 - 4 \Leftrightarrow \mathbf{x = -1}$

3ος τρόπος - Μέθοδος Οριζουσών

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 4 & -1 \end{vmatrix} = 1\cdot(-1) - 4\cdot 2 = -1 - 8 = -9$$

$$D_x = \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ -6 & -1 \end{vmatrix} = 3\cdot(-1) - (-6)\cdot 2 = -3 + 12 = 9$$

$$D_y = \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 4 & -6 \end{vmatrix} = 1\cdot(-6) - 4\cdot 3 = -6 - 12 = -18$$

Συνεπώς:

$x = D_x / D = 9 / -9 \Leftrightarrow \mathbf{x = -1}$ και $y = D_y / D = -18 / -9 \Leftrightarrow \mathbf{y = 2}$

Αν θέλουμε να είμαστε πιστότεροι στην διατύπωση της εκφώνησης, θα πρέπει αρχικά να δείξουμε ότι το σύστημα έχει μοναδική λύση. Οπότε, υπολογίζουμε την ορίζουσά του $D = -9 \neq 0$, αποδεικνύοντας έτσι του λόγου το αληθές. Στη συνέχεια, λύνουμε το σύστημα με οποιον τρόπο επιθυμούμε.