ΘΕΜΑ 2_17656

α. Γνωρίζουμε ότι σε μια συνάρτηση $f(x) = ρ·ημx$, ο συντελεστής ρ αποτελεί έναν απ' τους παράγοντες εκείνους, που επηρεάζει και μεταβάλλει τα ακρότατα της συνάρτησης. Με άλλα λόγια, αν πχ. $ρ > 0$, τότε η μέγιστη τιμή της f θα είναι η ρ , ενώ ελάχιστη η $-ρ$.

Συνεπώς, για τη δοθείσα συνάρτηση $f(x) = 1/2 \cdot συν2x$, $x \in \mathbb{R}$, μέγιστη κι ελάχιστη τιμή είναι οι 1/2 και $-1/2$, αντίστοιχα.

Αν για κάποιους, αυτό δεν είναι αρκετό, τότε αποδεικνύουμε του λόγου το αληθές. Γνωρίζουμε ότι, για κάθε $x \in \mathbb{R}$ είναι:

$-1 \leq ημ2x \leq 1 \Leftrightarrow$ (πολλ/ζουμε με 1/2)
$-1/2 \leq 1/2·ημ2x \leq 1/2 \Leftrightarrow$
$\mathbf{-1/2 \leq f(x) \leq 1/2}$

Η τελευταία σχέση εκφράζει, ακριβώς, το ζητούμενο.

Όσον αφορά στην περίοδο, γνωρίζουμε ότι ο παράγοντας εκείνος που επηρεάζει την περίοδο μιας τριγωνομετρικής συνάρτησης είναι ο συντελεστής ω της ανεξάρτητης μεταβλητής x, δηλαδή στη συγκεκριμένη συνάρτηση το ω = 2. Η νέα περίοδος υπολογίζεται από τη σχέση:

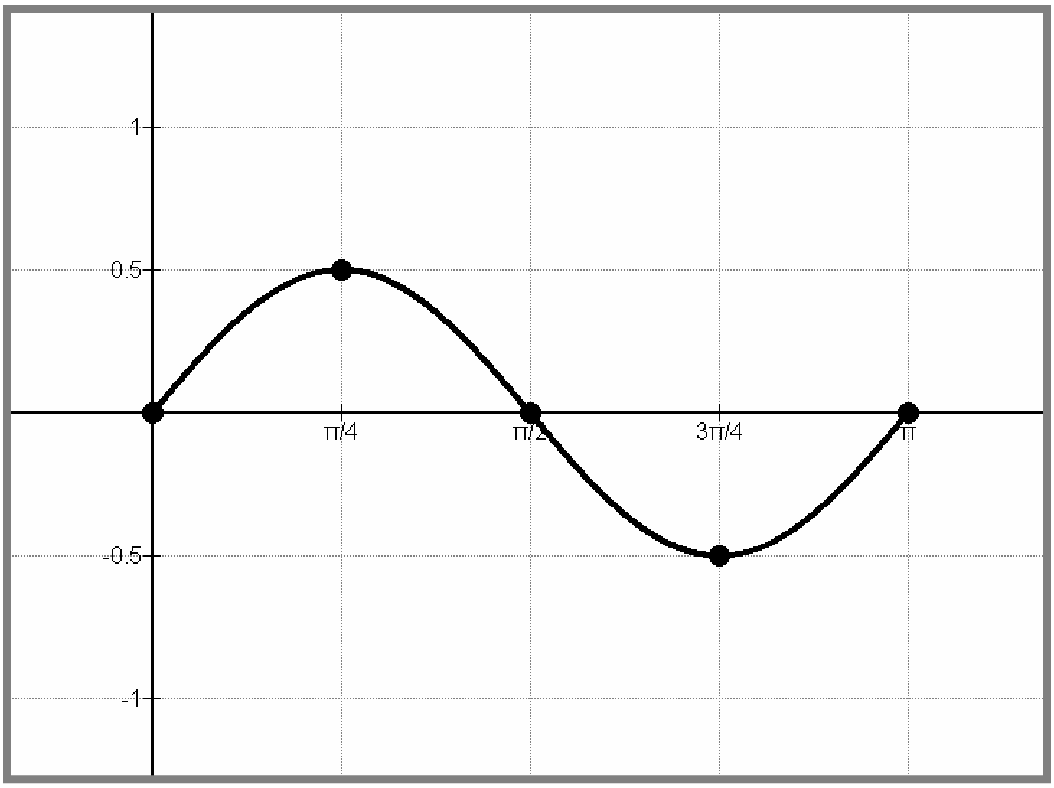
$T = 2π/ω = 2π/2 = π$

Συνεπώς, $\mathbf{T = π}$.

β. Κατασκευάζουμε τον αντίστοιχο πίνακα τιμών της συνάρτησης. Παρατηρούμε ότι έχουν προστεθεί, βοηθητικά στην τελευταία σειρά, οι τιμές της βασικής συνάρτησης ημx. Με αυτό τον τρόπο, υπολογίζουμε πολύ εύκολα τις τιμές της 1/2·ημx , πολλαπλασιάζοντας απλά τις αρχικές τιμές με 1/2 . Με άλλα λόγια, υποβάλλουμε τις τιμές της αρχικής συνάρτησης στις ίδιες αριθμητικές μεταβολές, τις οποίες παρατηρούμε στη συνάρτηση που μας δίνεται.

x	**0**	**π/4**	**π/2**	**3π/4**	**π**
1/2·ημ2x	**0**	**1/2**	**0**	**-1/2**	**0**
ημx	0	1	0	-1	0

Σχεδιάζουμε, τώρα, τη γραφική παράσταση:



γ. Έχουμε απαντήσει, ήδη απ' το (α) ερώτημα, πως η μέγιστη τιμή της συνάρτησης f είναι η 1/2 . Συνεπώς, για κάθε $x \in \mathbb{R}$ είναι:

$$f(x) \le 1/2 < 1$$

Αυτό σημαίνει, με απλά λόγια, πως η f ουδέποτε θα μπορέσει να "φτάσει" την τιμή 1.