ΘΕΜΑ 2_17647

α. Με απλή αντικατάσταση, των συντεταγμένων της λύσης, στη 2η εξίσωση την οποία χρειάζεται να επαληθεύουν, παίρνουμε τη σχέση:

$$\alpha x + \beta y = \gamma \Leftrightarrow 2\alpha - 3\beta - \gamma = 0$$

Ωστόσο, χρειάζεται ακόμη μία προϋπόθεση. Υπολογίζουμε την ορίζουσα του συστήματος και απαιτούμε να είναι διάφορη του μηδενός, ώστε η δοθείσα λύση να είναι μοναδική:

$$D = \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ \alpha & \beta \end{vmatrix} = \beta - \alpha(-2) = \beta + 2\alpha$$

Συνεπώς, για να είναι η λύση μοναδική, θα πρέπει:

$$D \neq 0 \Leftrightarrow \beta + 2\alpha \neq 0 \Leftrightarrow \beta \neq -2\alpha$$

Τελικά, οι παράμετροι α, β, γ θα πρέπει να συνδέονται με τη σχέση:

$$\mathbf{2\alpha - 3\beta - \gamma = 0} \quad (\text{με } \boldsymbol{\beta \neq -2\alpha})$$

Θέτουμε, λοιπόν, δύο τυχαίες τιμές στις παραμέτρους α, β (με τήρηση της προϋπόθεσης $\beta \neq -2\alpha$) , έστω $\boldsymbol{\alpha = 2}$ και $\boldsymbol{\beta = 1}$, οπότε έχουμε:

$$2\cdot 2 - 3\cdot 1 - \gamma = 0 \Leftrightarrow 4 - 3 - \gamma = 0 \Leftrightarrow \boldsymbol{\gamma = 1}$$

Άρα, μια πιθανή τριάδα τιμών για τις παραμέτρους, ώστε το σύστημα να έχει μοναδική λύση τη ζητούμενη, είναι: $\boldsymbol{(\alpha, \beta, \gamma) = (2, 1, 1)}$

β. Καταρχάς, προκειμένου το σύστημα να είναι αδύνατο και σύμφωνα με το προηγούμενο ερώτημα, θα πρέπει $D = 0$ ή, τελικά, $\boldsymbol{\beta = -2\alpha}$ (1) .

Θα πρέπει όμως, επίσης, ένα από τα D_x , D_y να είναι διάφορο του μηδενός.

$$D_x = \begin{vmatrix} 8 & -2 \\ \gamma & \beta \end{vmatrix} = 8\beta - \gamma(-2) = 8\beta + 2\gamma$$

$$D_y = \begin{vmatrix} 1 & 8 \\ \alpha & \gamma \end{vmatrix} = \gamma - 8\alpha$$

Οπότε:

$$D_x \neq 0 \Leftrightarrow 8\beta + 2\gamma \neq 0 \Leftrightarrow 4\beta + \gamma \neq 0 \Leftrightarrow \boldsymbol{\gamma \neq -4\beta}$$

ή

$$D_y \neq 0 \Leftrightarrow \gamma - 8\alpha \neq 0 \Leftrightarrow \boldsymbol{\gamma \neq 8\alpha}$$

Τα οποία όμως, τελικά, είναι ισοδύναμα, αφού λόγω (1) είναι $\beta = -2\alpha$!

Θέτουμε, λοιπόν, μια τυχαία τιμή στην παράμετρο α, έστω $\boldsymbol{\alpha = 2}$, οπότε από (1) έχουμε:

$$\beta = -2\alpha \Leftrightarrow \beta = -2\cdot 2 \Leftrightarrow \boldsymbol{\beta = -4}$$

Σύμφωνα, λοιπόν, με τα προηγούμενα και προκειμένου το σύστημα να είναι αδύνατο, θα πρέπει:

$\gamma \neq 8\alpha \Leftrightarrow \gamma \neq 8\cdot 2 \Leftrightarrow \boldsymbol{\gamma \neq 16}$

Άρα, μια πιθανή τριάδα τιμών για τις παραμέτρους, ώστε το σύστημα να είναι αδύνατο, είναι: $\boldsymbol{(\alpha, \beta, \gamma) = (2, -4, 10)}$