ΘΕΜΑ 2_16962

α. Αρκεί να εξετάσουμε τη σχέση μεταξύ των τιμών της συνάρτησης, καθώς μεταβάλλονται οι τιμές της ανεξάρτητης μεταβλητής x.

Γνωρίζουμε επίσης ότι, σε κάθε διατεταγμένο ζεύγος, αναγράφουμε πάντα πρώτη την τετμημένη x και δεύτερη την τεταγμένη y, ενός σημείου. Όμως, όταν αναφερόμαστε σε συναρτήσεις, θυμίζουμε ότι $y = f(x)$.

Συνεπώς, το γεγονός ότι η συνάρτηση διέρχεται απ' το σημείο Α (5, 2) σημαίνει ότι για $x_1 = 5$ είναι $f(x_1) = f(5) = 2$, ενώ αναλόγως για το σημείο Β (4, 9) σημαίνει ότι για $x_2 = 4$ είναι $f(x_2) = f(4) = 9$.

Παρατηρούμε ότι $x_1 > x_2$ (αφού $5 > 4$) , ενώ $f(x_1) < f(x_2)$ (αφού $2 < 9$) , δηλαδή ισχύει η ισοδυναμία:

$$\mathbf{x_1 > x_2 \Leftrightarrow f(x_1) < f(x_2)}$$

Εφόσον η ανισοτική σχέση αλλάζει φορά, η συνάρτηση είναι **γνησίως φθίνουσα** σε όλο το $\mathbb{R}$.

β. Από το προηγούμενο ερώτημα (ουσιαστικά από την υπόθεση), είναι γνωστό ότι $f(5) = 2$. Άρα, η ανίσωση που δίνεται μπορεί να γραφτεί ως:

$$f(5 - 3x) < 2 \Leftrightarrow f(5 - 3x) < f(5)$$

Επειδή, όμως, αποδείξαμε ότι η συνάρτηση f είναι γνησίως φθίνουσα, τότε θα είναι:

$$f(5 - 3x) < f(5) \Leftrightarrow 5 - 3x > 5$$

Προσέχουμε, δηλαδή, πώς όταν «περνάμε» από τις τιμές μια φθίνουσας συνάρτησης στις τιμές του x, αλλάζει η φορά της ανισότητας. Στη συνέχεια, λύνουμε την ανισότητα, κατά τα γνωστά:

$$5 - 3x > 5 \Leftrightarrow -3x > 0 \Leftrightarrow \mathbf{x < 0}$$