

ΘΕΜΑ 4

α) Να λύσετε τις εξισώσεις

$$3x^2 - 14x + 8 = 0 \quad (1)$$

και

$$8x^2 - 14x + 3 = 0 \quad (2)$$

(Μονάδες 10)

β) Ένας μαθητής παρατήρησε ότι οι ρίζες της εξίσωσης (2) είναι οι αντίστροφοι των ριζών της εξίσωσης (1) και ισχυρίστηκε ότι το ίδιο θα ισχύει για οποιοδήποτε ζευγάρι εξισώσεων της μορφής:

$$ax^2 + bx + \gamma = 0 \quad (3) \quad \text{και} \quad \gamma x^2 + bx + a = 0 \quad (4),$$

με $a \cdot \gamma \neq 0$.

Αποδείξτε τον ισχυρισμό του μαθητή, δείχνοντας ότι:

Αν ο αριθμός ρ είναι ρίζα της εξίσωσης (3) και $a \cdot \gamma \neq 0$, τότε

i) $\rho \neq 0$ και (Μονάδες 5)

ii) ο $\frac{1}{\rho}$ επαληθεύει την εξίσωση (4). (Μονάδες 10)